Početní část 2 - 10.6.2021

3. Funkce f je spojitá na kompaktní množině M, má tedy zde maximum i minimum. Dále f je evidentně spojitě diferencovatelná. Na vnitřku M^o množiny M musí v bodě extrému platit

$$0 = \nabla f = (y, x, -e^{-z}).$$

Jelikož $e^{-z} \neq 0$, pak f se musí nabývat extrémů na hranici ∂M. Uvažujme nejprve část

$$\partial M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ |z| < 1\}.$$

Pro bod extrému a na ∂M_1 musí platit

$$\lambda \nabla g(a) = \nabla f(a), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1.$$

To vede na

$$\lambda(2x, 2y, 0) = (y, x, -e^z).$$

Tato rovnice ale nemá žádná řešení. Dále uvažujme

$$\partial M_{2,\pm} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 1, \ z = \pm 1\}.$$

Pro bod extrému a na ∂M_1 musí platit

$$\lambda \nabla g_\pm(a) = \nabla f(a), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ g_\pm(x, y, z) = z \mp 1.$$

To vede na

$$\lambda(0, 0, 1) = (y, x, -e^{-z}) \Rightarrow x = y = 0, \ z = \pm 1.$$

Konečně na kružnicích

$$K_\pm = \{(x, y, z) : , x^2 + y^2 = 1, \ z = \pm 1\}$$

musí v bodě extrému a platit

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \nabla g_\pm(a) + \lambda_2 \nabla g(a) = \nabla f(a), \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \\
\lambda_1(0, 0, 1) + \lambda_2(2x, 2y, 0) = (y, x, e^{-z}), \\
2\lambda_2 x = y, \ 2\lambda_2 y = x \Rightarrow x = \pm y.
\end{aligned}$$

Podezřelé body tedy jsou $(0, 0, \pm 1), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1)$, kde znaménka jsou na sobě zcela nezávislá, celkem tedy máme 10 bodů. Dosazením zjistíme, že globální maxima jsou v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ a globální minima v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$.

4. Platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = (3y^2+1)|_{x=0,y=1} = 4 \neq 0,$$

z věty o implicitní funkci tedy plyne, že existuje $\delta > 0$ a právě jedna funkce $y = y(x) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, která splňuje $F(x, y(x)) = 2,\ 1 = y(0)$. Dále z derivace složené funkce dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + (3y^2+1)y', \\ 0 = \frac{d^2}{dx^2}F(x,y(x)) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 \\ &= 2 + (3y^2+1)y''. \end{aligned}$$

Pro $x = 0$ a $y = 1$ dostaneme:

$$y'(0) = 0,\ y''(0) = -\frac{2}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Funkce y má tedy skutečně v bodě $x = 0$ lokální maximum.